Les angles

Niveau : Collège

Rappel du B.O

Classe	Connaissances	Compétences	Commentaires
6ème	/**4.2 *Angles***	*- Comparer des angles sans avoir recours à leur mesure.*	** Le rapporteur est un nouvel instrument de mesure qu'il convient d'introduire à l'occasion de la construction et de l'étude des figures.*
		- Utiliser un rapporteur pour : - déterminer la mesure en degré d'un angle, - construire un angle de mesure donnée en degré.*	
		- Connaître et utiliser la définition de la bissectrice.*	**La bissectrice d'un angle est définie en sixième comme la demi-droite qui partage l'angle en deux angles adjacents de même mesure. La justification de la construction de la bissectrice à la règle et au compas est reliée à la symétrie axiale.*
		- Utiliser différentes méthodes pour tracer	
		la bissectrice d'un angle.	
	** Bissectrice d'un angle.*		
5ème	**4.2 *Angles***	Maîtriser l'utilisation du rapporteur.	
		- Reproduire un angle.	Pour la reproduction d'un angle : usage d'un gabarit ou du rapporteur. L'usage du rapporteur doit faire l'objet d'un approfondissement.
	Caractérisation angulaire du parallélisme.	*- Connaître et utiliser les propriétés relatives aux angles formés par deux parallèles et une sécante et leurs réciproques.*	*À cette occasion, le vocabulaire suivant est également utilisé : angles opposés par le sommet, angles alternes-internes, angles correspondants, angles adjacents, angles complémentaires, angles supplémentaires. Les propriétés sont formulées et utilisées dans les deux sens (direct et réciproque), mais certaines réciproques peuvent être déclarées admises sans démonstration.*
	Triangle, somme des angles d'un triangle.	- Connaître et utiliser, dans une situation donnée, le résultat sur la somme des angles d'un triangle. Savoir l'appliquer aux cas particuliers du triangle équilatéral, d'un triangle rectangle, d'un triangle isocèle.	*La symétrie centrale ou la caractérisation angulaire du parallélisme qui en découle permettent de démontrer que la somme des angles d'un triangle est égale à 180 degrés.*
	Propriétés des triangles usuels.	Connaître les propriétés relatives aux angles des triangles suivants : triangle isocèle, triangle équilatéral, triangle rectangle.	La connaissance ainsi développée des figures ci-contre conduit à les situer les unes par rapport aux autres en mettant en évidence leurs propriétés communes et des propriétés différentes.
4ème	Bissectrice d'un angle.	- Connaître et utiliser la définition de la bissectrice.	La bissectrice d'un angle est définie en sixième comme la demi-droite qui partage l'angle en deux angles adjacents de même mesure. La justification de la construction de la bissectrice à la règle et au compas est reliée à la symétrie axiale.
		- Utiliser différentes méthodes pour tracer	
		la bissectrice d'un angle.	
		- Caractériser les points de la bissectrice d'un angle	*Cette caractérisation permet de démontrer que les*

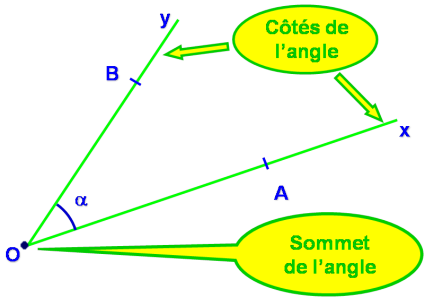
	Bissectrices et cercle inscrit.	*donnée par la propriété d'équidistance aux deux côtés de l'angle. - Construire le cercle inscrit dans un triangle.*	*trois bissectrices d'un triangle sont concourantes et justifie la construction du cercle inscrit. L'analogie est faite avec le résultat concernant les médiatrices des trois côtés du triangle vu en classe de cinquième.*
	Triangle rectangle : cosinus d'un angle.	*- Utiliser dans un triangle rectangle la relation entre le cosinus d'un angle aigu et les longueurs des côtés adjacents. - Utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur approchée :* *- du cosinus d'un angle aigu donné ; - de l'angle aigu dont le cosinus est donné.*	
3ème	Triangle rectangle, *relations trigonométriques.*	*- Connaître et utiliser les relations entre le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle aigu et les longueurs de deux des côtés d'un triangle rectangle.* *- Déterminer, à l'aide de la calculatrice, des valeurs approchées :* *• du sinus, du cosinus et de la tangente d'un angle aigu donné;* *• de l'angle aigu dont on connaît le cosinus, le sinus ou la tangente*	*La définition du cosinus a été vue en classe de quatrième. Le sinus et la tangente d'un angle aigu sont introduits comme rapports de longueurs. Les formules suivantes sont à démontrer :* $\cos^2 \hat{A}+\sin^2 \hat{A}=1$ *et* $\tan \hat{A}=\frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}}$. La seule unité utilisée est le degré décimal.
	Angle inscrit, angle au centre.	*- Connaître et utiliser la relation entre un angle inscrit et l'angle au centre qui intercepte le même arc.*	*Cette comparaison entre angle inscrit et angle au centre permet celle de deux angles inscrits sur un même cercle interceptant le même arc.*
	Polygones réguliers.	- Construire un triangle équilatéral, un carré, *un hexagone régulier, un octogone* connaissant son centre et un sommet.	

I) Classe de 6ème

1) Angles

Définition :

Un angle est une portion de plan délimitée par deux demi-droites ayant la même origine. Les deux demi-droites s'appellent les côtés de l'angle. L'origine commune des deux demi-droites s'appelle le sommet de l'angle.

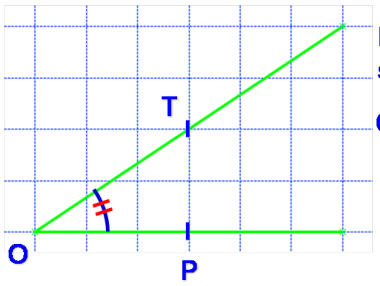


Angle : notations

Cet angle peut être noté $\widehat{BOA}$ $\widehat{AOB}$ ou $\widehat{xOy}$ $\widehat{yOx}$

La lettre désignant le sommet de l'angle est toujours placée au milieu.
On peut aussi noter cet angle en utilisant une lettre : ici la lettre α . α est une lettre de l'alphabet grec qui se prononce « alpha ». C'est l'équivalent du a de notre alphabet.

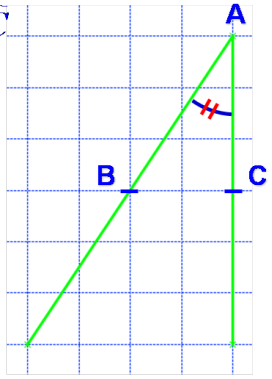
Angles superposables



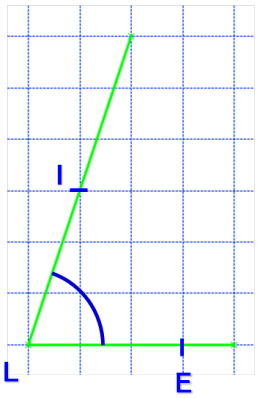
Les angles $\widehat{TOP}$ et $\widehat{BAC}$ sont superposables.

On écrit alors :

$$\widehat{TOP} = \widehat{BAC}$$



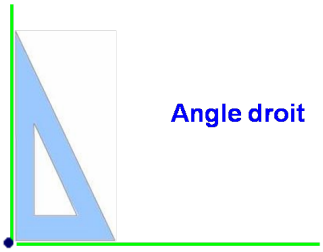
Les angles $\widehat{TOP}$ et $\widehat{ILE}$ ne sont pas superposables.



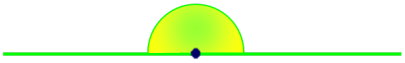
Sur un dessin, on montre que deux angles sont égaux en les marquant avec un symbole identique.

Angles particuliers

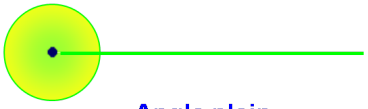
Angle nul



Angle droit

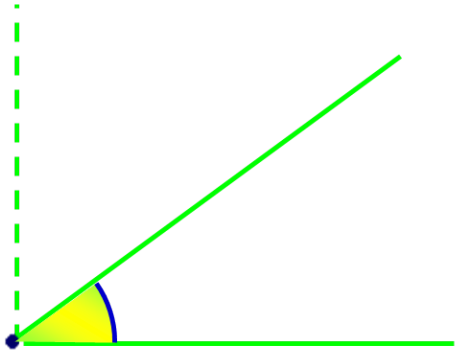


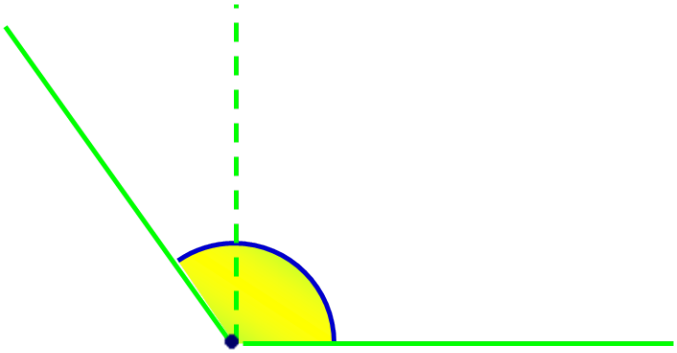
Angle plat



Angle plein

Angles aigus - Angles obtus

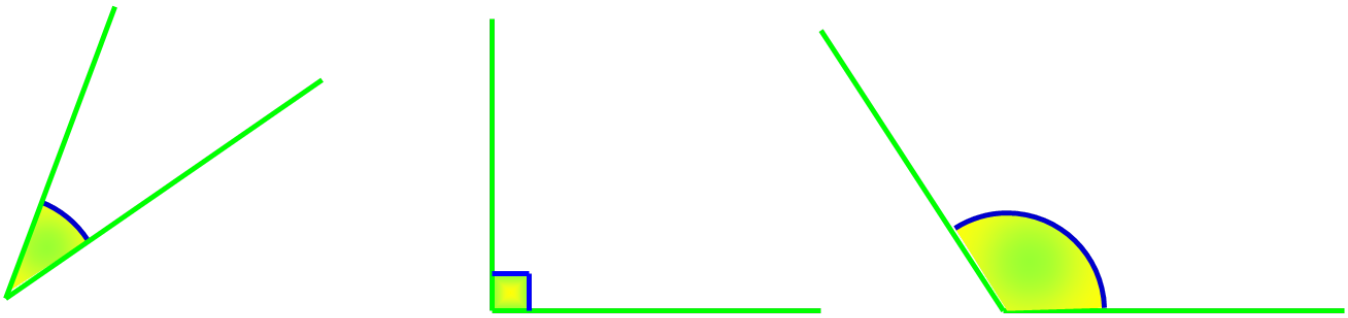




Un angle aigu est un angle plus petit qu'un angle droit.	Un angle obtus est un angle plus grand qu'un angle droit et plus petit qu'un angle plat.

Angles saillants

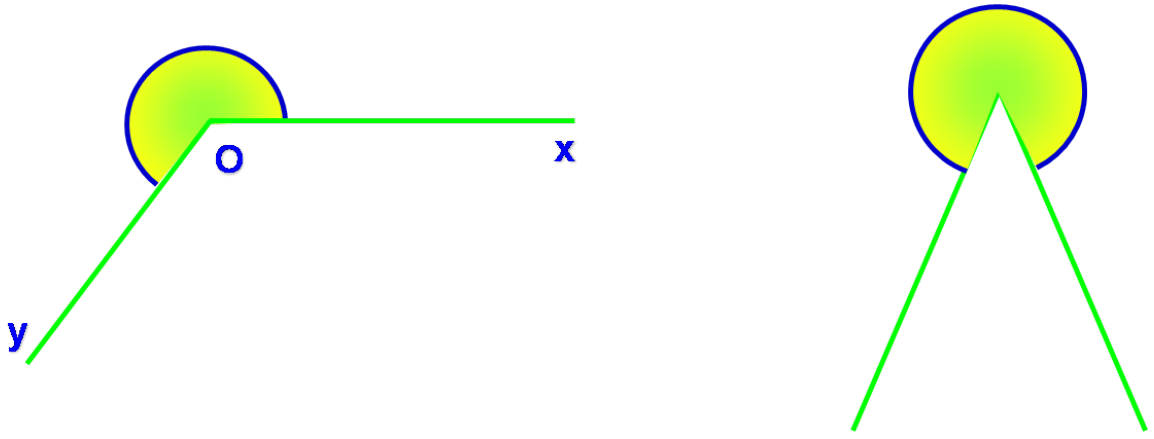
Définition : Un angle saillant est un angle qui est plus petit qu'un angle plat.



Ces trois angles sont des angles saillants.

Angles rentrants

Définition : Un angle rentrant est un angle qui est plus grand qu'un angle plat.

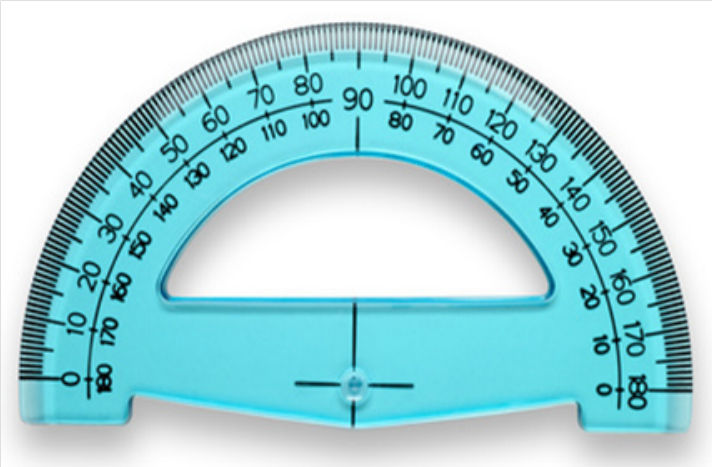


Ces deux angles sont des angles rentrants.

Un angle rentrant est noté : $\widehat{xOy}$

Mesure d'un angle et rapporteur

Le rapporteur est un instrument qui sert à mesurer des angles. *Il ne s'agit pas d'un instrument de tracé mais d'un instrument de mesure.*



Il existe plusieurs unités pour mesurer les angles :

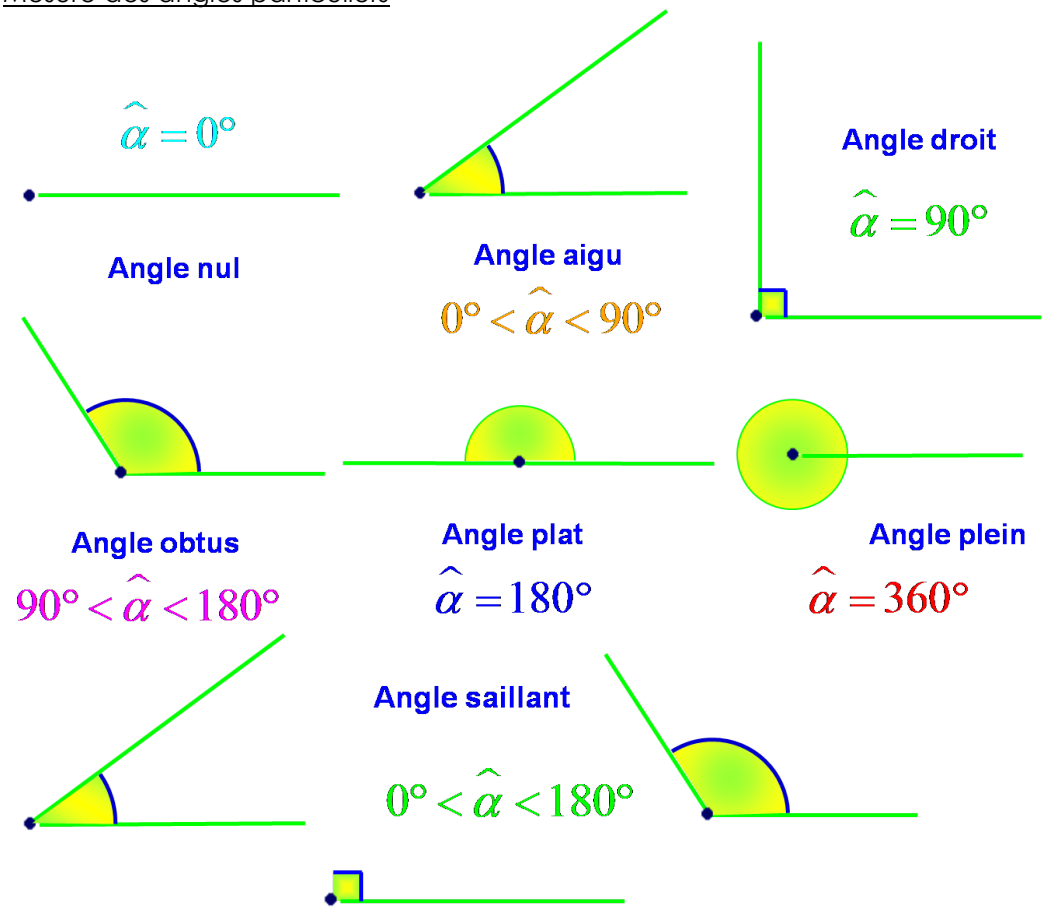
- le degré
- le grade
- le radian

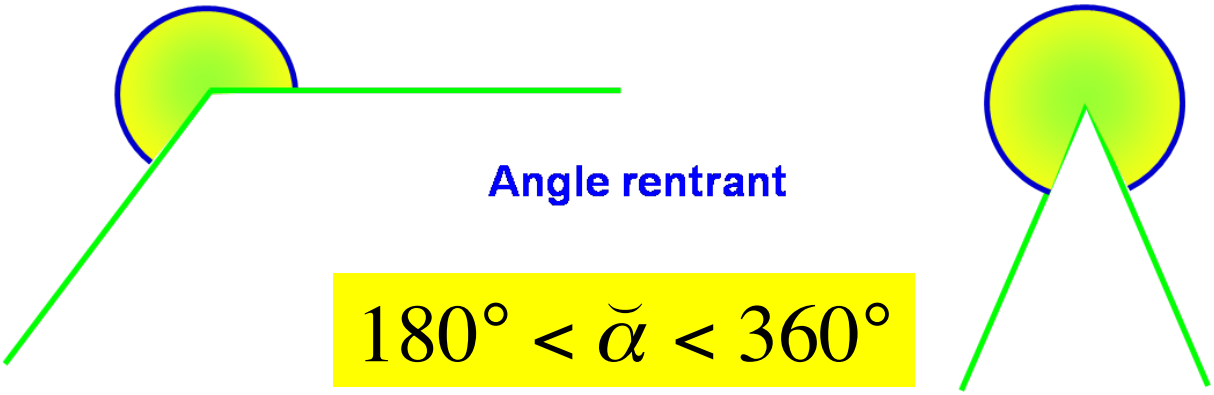
Au collège, on utilise uniquement le degré.

Le degré est noté °.

Les rapporteurs sont gradués en degrés (quelques fois aussi en grades) de 0° à 180°.

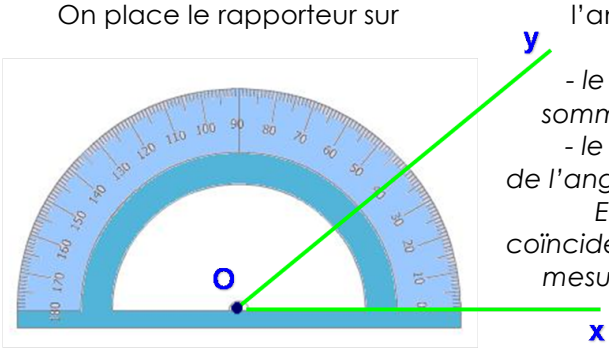
Mesure des angles particuliers





Mesurer un angle avec un rapporteur

On place le rapporteur sur l'angle :



- le centre du rapporteur doit coïncider avec le sommet de l'angle

- le zéro de la graduation est placé sur l'un des côtés de l'angle

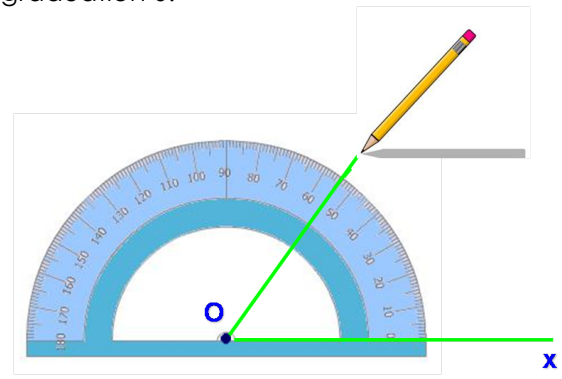
Ensuite on repère le trait de la graduation qui coïncide avec le deuxième côté de l'angle et on lit la mesure de l'angle.

Ici, l'angle $\widehat{xOy}$ mesure 40°.

Construire un angle avec un rapporteur

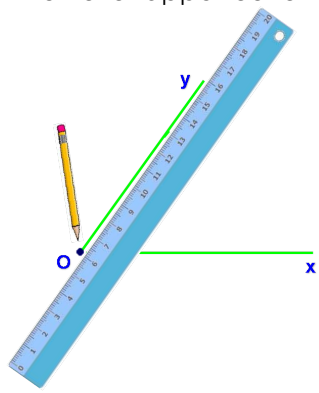
La demi-droite [Ox) est donnée.
On veut construire un angle xÔy qui mesure 55°.

On positionne le rapporteur en plaçant son centre sur le point O et le côté [Ox) sur la graduation 0.



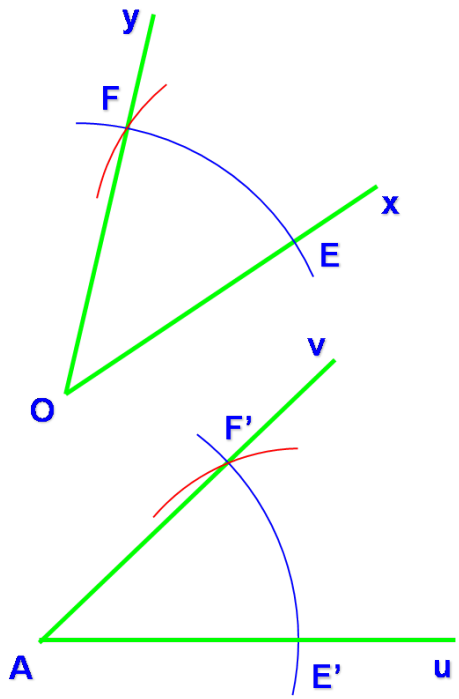
Puis on repère la position de la graduation souhaitée, ici 55°, avec un point.

On retire le rapporteur et on trace la demi-droite [Oy) à l'aide d'une règle.



On a ainsi construit un angle xÔy qui mesure 55°.

<u>Reproduire un angle avec la règle et le compas</u>



Pour reproduire l'angle xÔy avec une règle et un compas, on commence par tracer une demi-droite [Au).

Puis on trace un arc de cercle de centre O qui coupe [Ox) en E et [Oy) en F.

Avec l'ouverture de compas OE, on trace un arc de cercle de centre A qui coupe [Au) en E'.

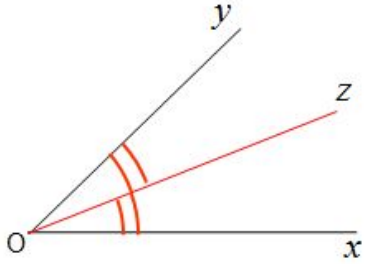
Avec l'ouverture de compas EF, on trace un arc de cercle de centre E' qui coupe l'arc de cercle bleu de centre A en F'.

Avec une règle, on trace la demi-droite [AF').

On a [AF') = [Av) et xÔy = uÂv.

2) Bissectrice d'un angle

<u>Définition :</u> La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui partage cet angle en deux angles égaux.



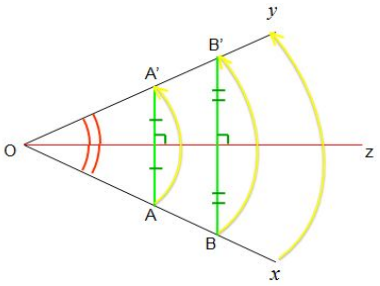
La demi-droite [Oz) est la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$.

$$\widehat{xOz} = \widehat{zOy} = \frac{1}{2}\widehat{xOy}$$

Propriété : chaque point de la bissectrice est équidistant des côtés de l'angle.

Bissectrice et symétrie

Propriété : La bissectrice d'un angle est son axe de symétrie.



Si l'on plie la feuille de papier suivant la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$,

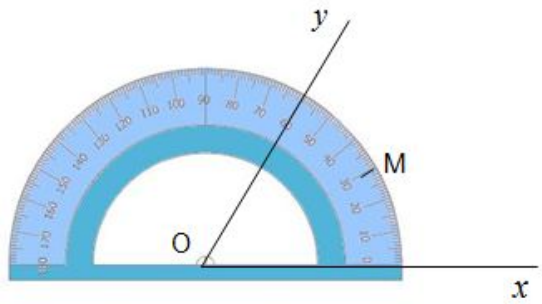
la demi-droite [Ox) et la demi-droite [Oy) se superposent.

Construction de la bissectrice

Première méthode : avec un rapporteur et une règle (non graduée)

On veut tracer la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$.

- On place le rapporteur sur l'angle.



- On mesure l'angle.
Ici on a

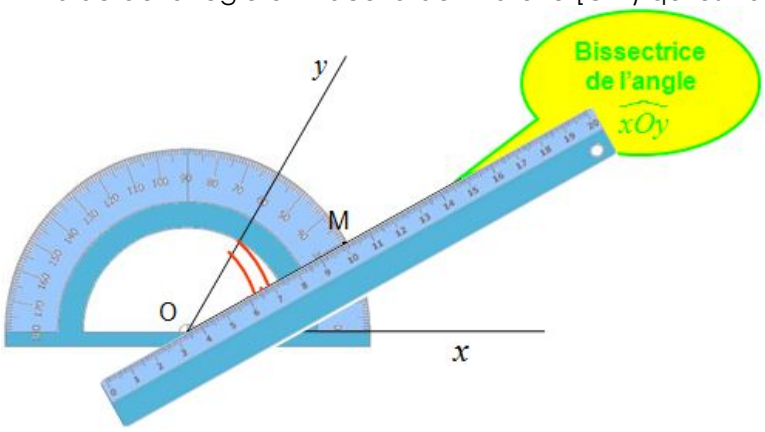
$$\widehat{xOy} = 60°$$

- A l'aide du rapporteur on trace un point M tel que

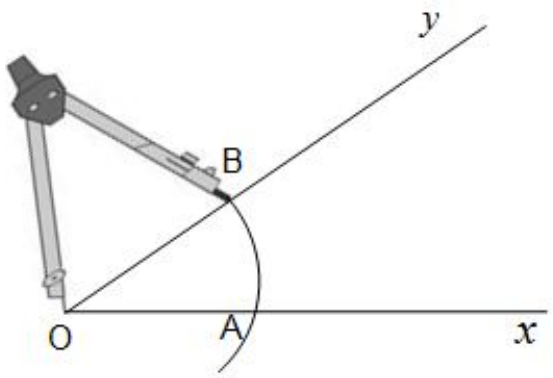
$$\widehat{xOM} = \frac{1}{2}\widehat{xOy} = \frac{1}{2} \times 60° = 30°$$

- Puis on retire le rapporteur.

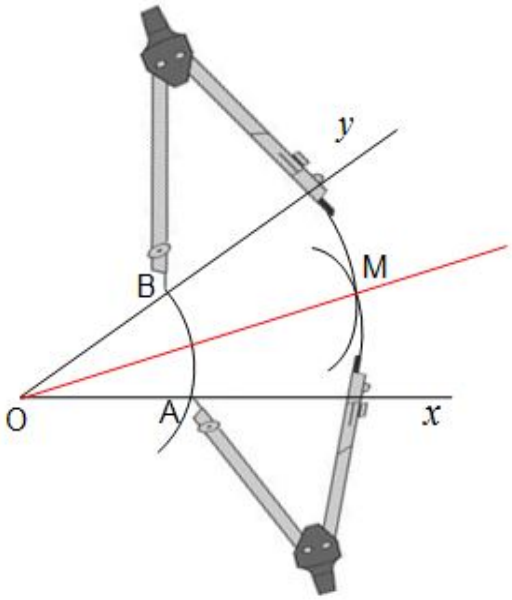
- A l'aide de la règle on trace la demi-droite [OM] qui est la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$.



Deuxième méthode : avec un compas et une règle (non graduée)



- Pour tracer la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$, on trace un arc de cercle de centre O qui coupe les deux demi-droites [Ox) et [Oy) en A et B respectivement.



- Puis on trace deux arcs de cercle de même rayon, l'un de centre A, l'autre de centre B.

- Ces deux arcs de cercle se coupent en un point M.

- La demi-droite [OM] est la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$.

I) Classe de 5ème

1) Angles

Angles adjacents

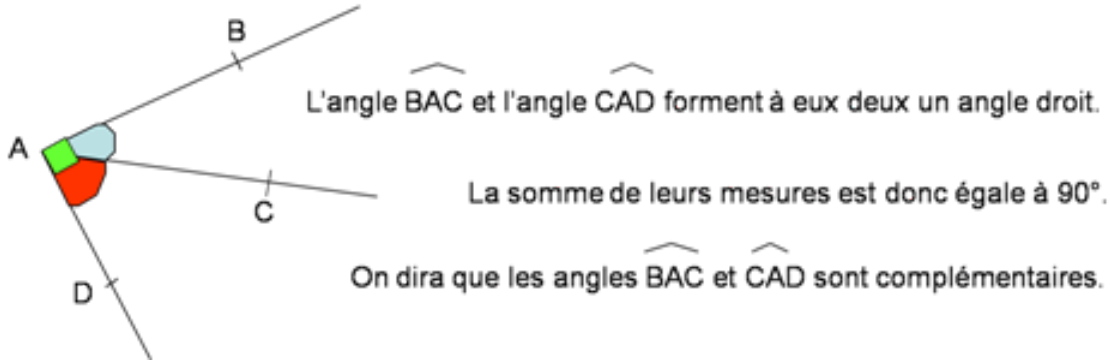
Le côté [AC) est commun aux deux angles.
Les deux angles sont de part et d'autre de ce côté [AC) commun.

On dit que les deux angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{CAD}$ sont adjacents.

Définition : Pour que deux angles soient adjacents, il faut :

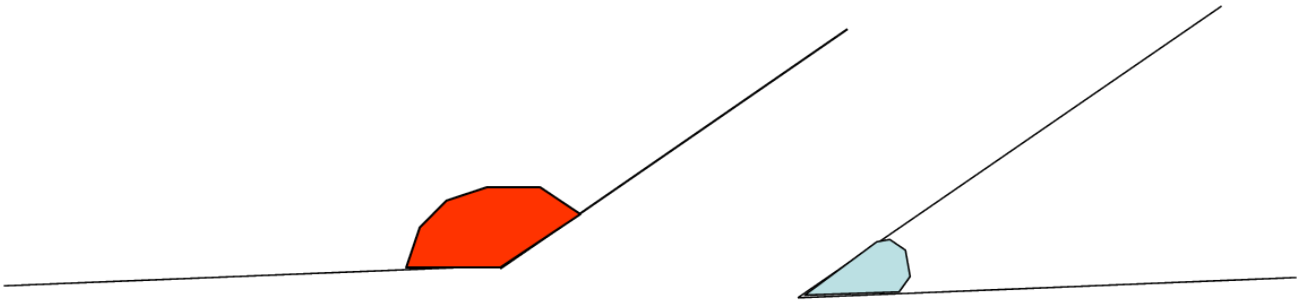
- qu'ils aient le même sommet,
- qu'ils aient un côté commun,
- qu'ils soient situés de part et d'autre de ce côté commun.

Angles complémentaires


B
A
C
D
L'angle BAC et l'angle CAD forment à eux deux un angle droit.
La somme de leurs mesures est donc égale à 90°.
On dira que les angles BAC et CAD sont complémentaires.

Deux angles sont complémentaires lorsque la somme de leurs mesures est égale à 90°.

Angles supplémentaires

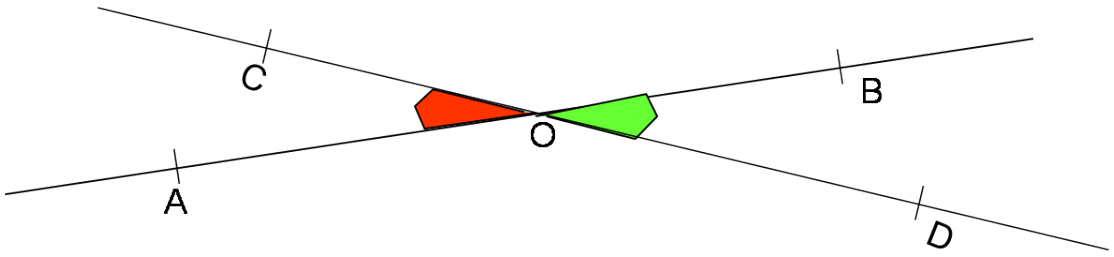


Voici deux angles : l'un est obtus, l'autre est aigu. A eux deux, ils forment un angle plat.

La somme de leurs mesures est donc égale à 180°. On dira que ces deux angles sont supplémentaires.

Deux angles sont supplémentaires lorsque la somme de leurs mesures est égale à 180°.

Angles opposés par le sommet

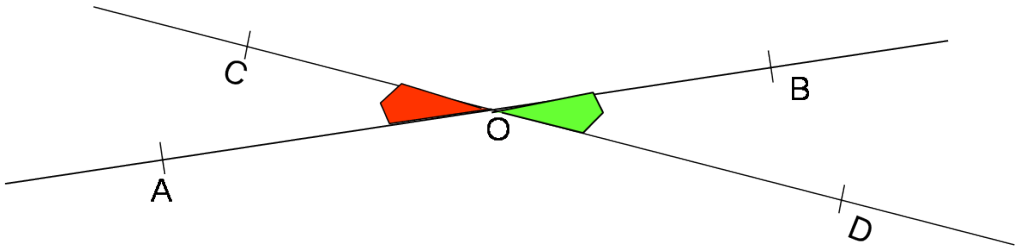


Voici deux droites (AB) et (CD) sécantes en O. Observons les deux angles ainsi formés. Ces deux angles ont le même sommet et leurs côtés se prolongent l'un l'autre. On dit qu'ils sont opposés par le sommet.

Deux angles sont opposés par le sommet quand ils ont le même sommet et que les côtés de l'un sont des demi-droites opposées aux côtés de l'autre.

Propriété des angles opposés par le sommet

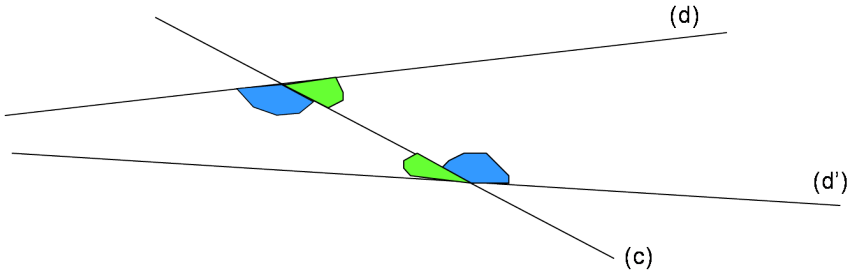
Propriété : Deux angles opposés par le sommet ont la même mesure.



Dans la symétrie de centre O, le point O est son propre symétrique et …
La droite (AB) a pour symétrique :(AB)
La droite (CD) a pour symétrique : (CD

$\widehat{BOD}$ a pour symétrique $\widehat{AOC}$ … On a donc $\widehat{BOD} = \widehat{AOC}$

Angles alternes-internes

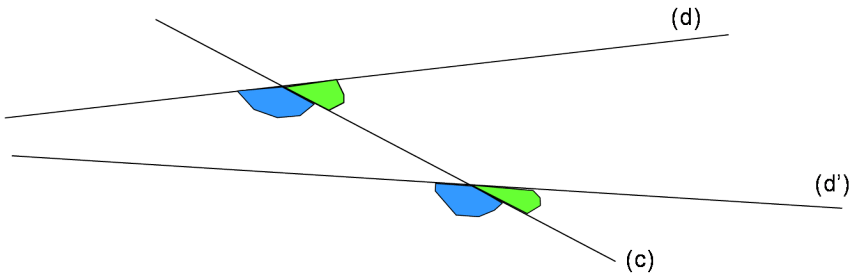


Voici deux droites (d) et (d'). Ces deux droites sont coupées par une troisième droite que nous appellerons (c).

Ces deux angles coloriés en bleu (ou ces deux autres coloriés en vert) sont dits alternes-internes.

Soit deux droites (d) et (d') coupées par une sécante (c). Deux angles sont dits alternes-internes s'ils ne sont pas adjacents et s'ils sont à la fois entre les 2 droites (d) et (d') et de part et d'autre de la sécante (c).

Angles correspondants



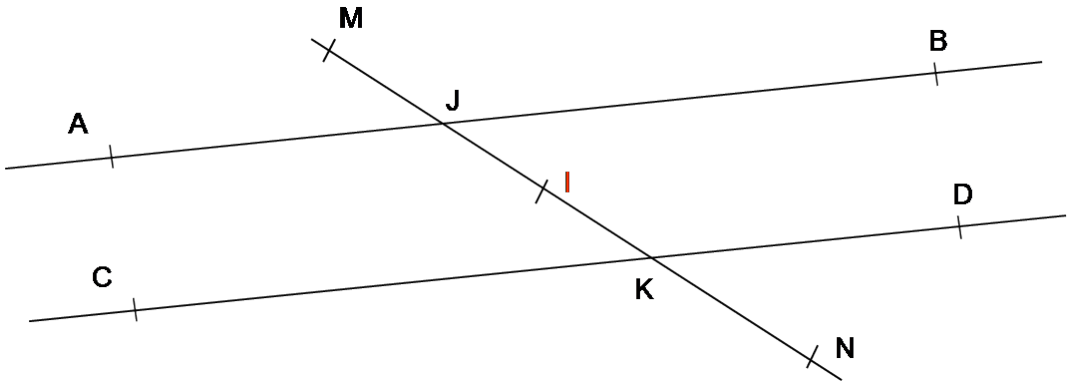
Voici deux droites (d) et (d'). Ces deux droites sont coupées par une troisième droite que nous appellerons (c).
Ces deux angles coloriés en bleu (ou ces deux autres coloriés en vert) sont dits correspondants.

Définition : On a deux droites (d) et (d') coupées par une sécante (c).
Deux angles sont dits correspondants s'ils ne sont pas adjacents, s'ils sont du même côté de la sécante (c) et si l'un est situé entre les 2 droites (d) et (d') et l'autre non.

2) Caractérisation angulaire du parallélisme

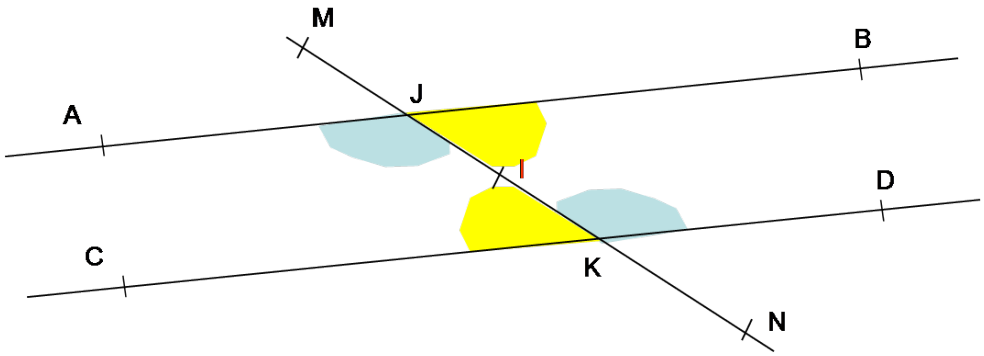
Propriété : Deux droites parallèles coupées par une sécante déterminent des angles alternes-internes de même mesure.

Une construction géométrique



(AB) et (CD) sont deux droites parallèles.
La droite (MN) coupe les deux droites (AB) et (CD) respectivement en J et K.
I est le milieu du segment [JK].

Puisque I est le milieu du segment [JK], K est le symétrique de J par rapport à I.
J est un point de (AB) et K, son symétrique est sur la droite (CD). De plus, (AB) // (CD)
Dans la symétrie de centre I, la droite symétrique de (AB) est la droite (CD).

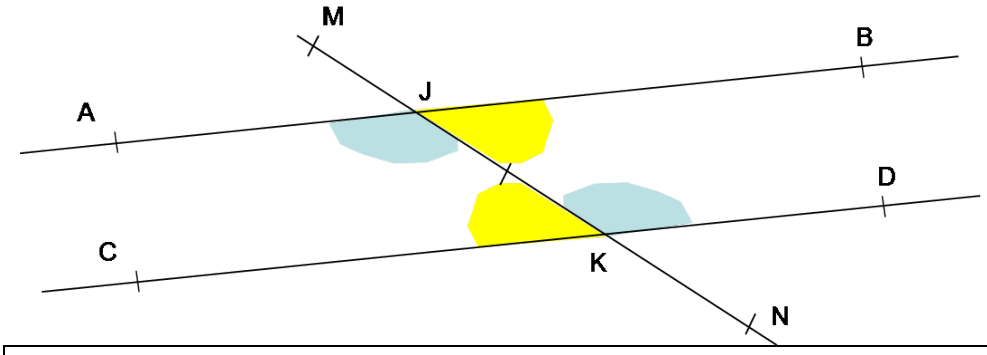


Dans la symétrie de centre I, la droite symétrique de (AB) est la droite (CD).

L'angle $\widehat{AJI}$ a donc pour symétrique l'angle $\widehat{DKI}$ Donc $\widehat{AJI} = \widehat{DKI}$

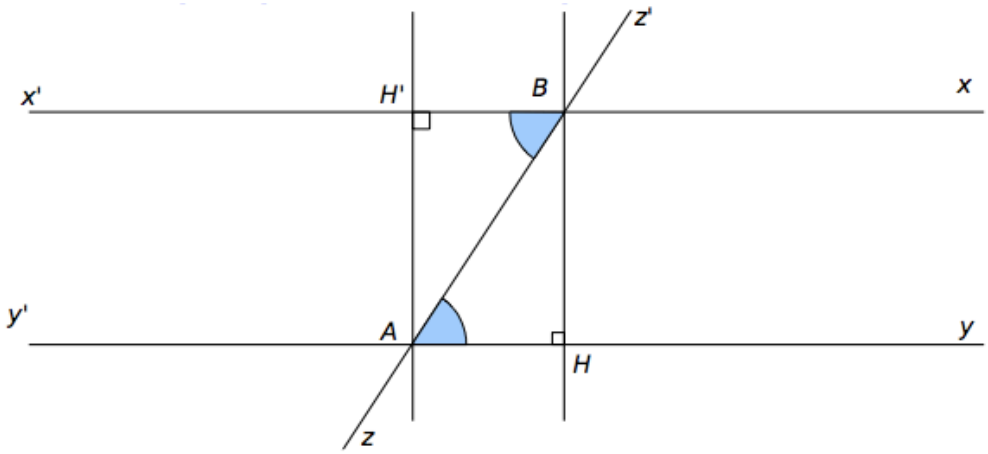
L'angle $\widehat{BJI}$ a donc pour symétrique l'angle $\widehat{CKI}$ Donc $\widehat{BJI} = \widehat{CKI}$

<u>Angles alternes-internes : propriété réciproque</u>



Propriété (admise en 5ème): Deux droites coupées par une sécante qui déterminent des angles alternes-internes de même mesure sont parallèles.

<u>Démonstration :</u>



Par hypothèse, $\widehat{BAH}=\widehat{ABH'}$.
On trace la perpendiculaire à *(yy')* passant par B : elle coupe *(yy')* en H.
On trace la perpendiculaire à *(xx')* passant par A : elle coupe *(xx')* en H'.

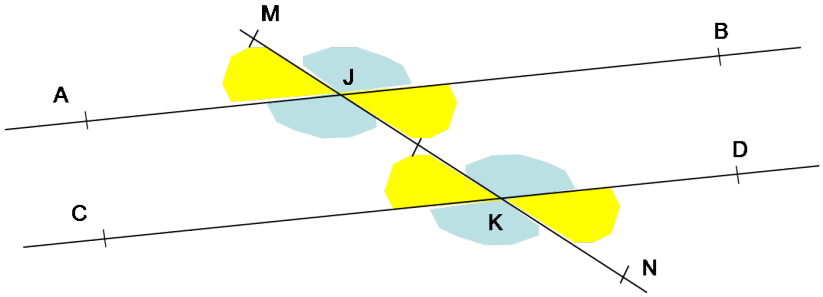
Les deux triangles ABH' et ABH ont deux angles de même mesure, le troisième est donc le même.

Par conséquent $\widehat{H'AB}+\widehat{BAH}=\widehat{H'AB}+\widehat{H'BA}=90°$ car ce sont les deux angles aigus d'un triangle rectangle.

Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elle sont parallèles entre elles.

Donc *(xx') // (yy')*.

Angles de même mesure



En tant qu'angles opposés par le sommet :

L'angle $\widehat{MJB}$ a la même mesure que l'angle $\widehat{AJK}$.

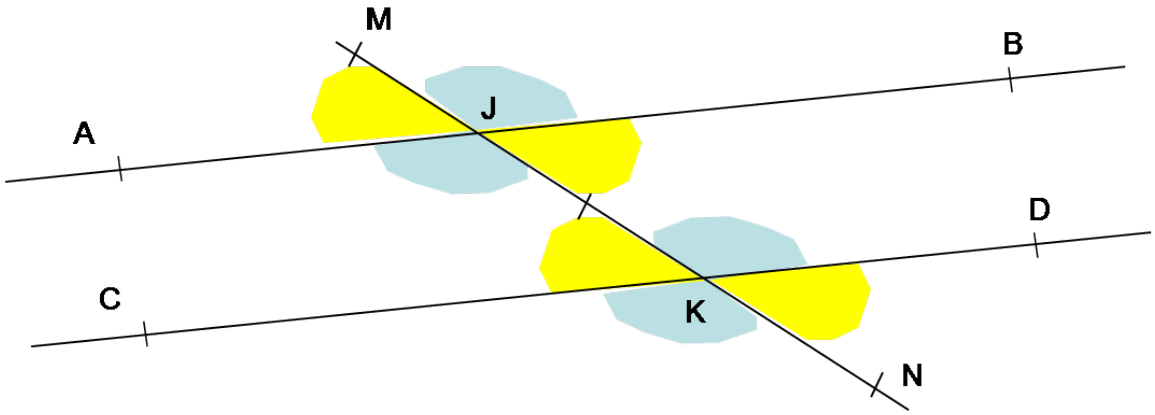
L'angle $\widehat{CKN}$ a la même mesure que l'angle $\widehat{JKD}$.

L'angle $\widehat{NKD}$ a la même mesure que l'angle $\widehat{JKC}$.

L'angle $\widehat{MJA}$ a la même mesure que l'angle $\widehat{BJK}$.

Angles correspondants

Propriété : Deux droites parallèles coupées par une sécante déterminent des angles correspondants de même mesure.



L'angle $\widehat{MJB}$ et l'angle $\widehat{JKD}$

L'angle $\widehat{CKN}$ et l'angle $\widehat{AJK}$

L'angle $\widehat{NKD}$ et l'angle $\widehat{BJK}$

L'angle $\widehat{MJA}$ et l'angle $\widehat{JKC}$

sont correspondants et ont la même mesure.

Angles correspondants : propriété réciproque

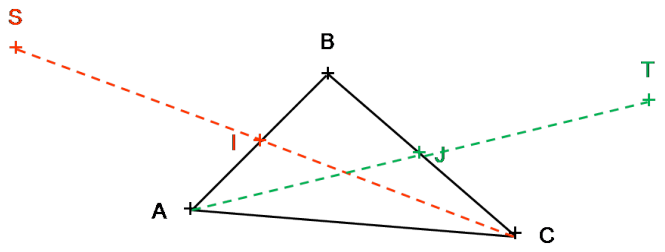
Propriété (admise en 5ème) : Deux droites coupées par une sécante qui déterminent des angles correspondants de même mesure sont parallèles.

Démonstration analogue à la précédente en passant par les angles opposés par le sommet, et les angles alternes internes et comme deux droites coupées par une sécante qui déterminent des angles alternes-internes de même mesure sont parallèles

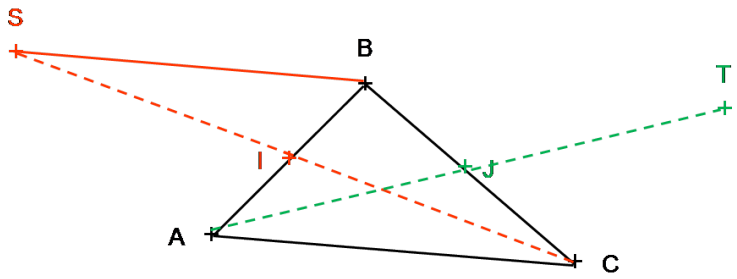
3) Somme des angles dans un triangle

Propriété ; La somme des mesures des trois angles d'un triangle est égale à 180°.

Un problème de symétrie centrale

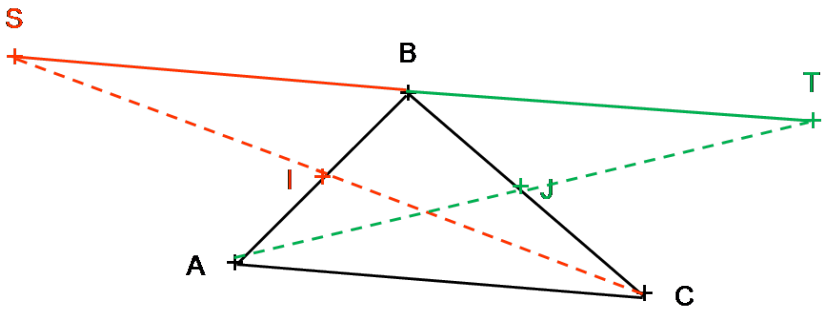


ABC est un triangle quelconque.
I est le milieu de [AB]
J est le milieu de [BC]
S est le symétrique de C par rapport à I
T est le symétrique de A par rapport à J



Les symétriques des points A et C par rapport au point I sont respectivement B et S.

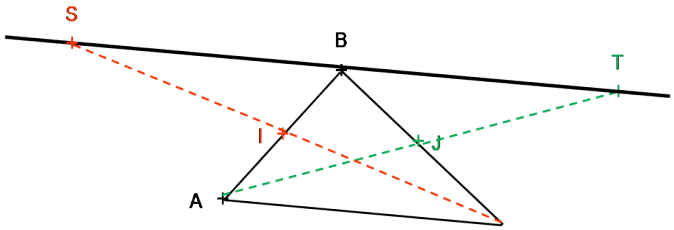
Le symétrique de la droite (AC) par rapport au point I est donc la droite (BS) avec (AC) // (BS).



Les symétriques des points A et C par rapport au point J sont respectivement T et B.

Le symétrique de la droite (AC) par rapport au point J est donc la droite (BT) avec (AC) // (BT).

Des points alignés ...

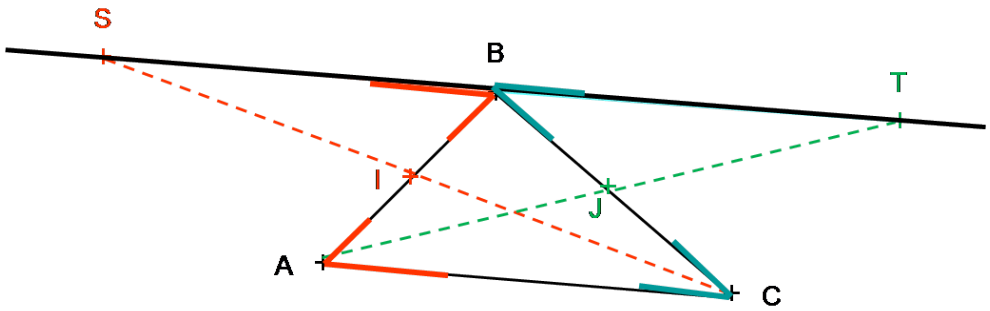


On veut montrer que les points S, B et T sont alignés.

On a : (BS) // (AC) et (BT) // (AC). Or, deux droites parallèles à la même troisième sont parallèles entre elles. Donc (BS) // (BT).

Ces deux droites ayant en commun le point B, elles sont confondues : S, B et T sont donc alignés.

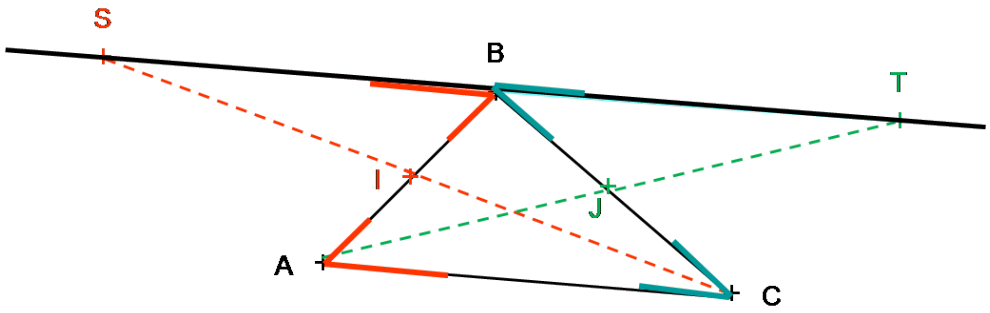
<u>Des angles symétriques</u>



Le symétrique de l'angle BAC est l'angle ABS. On a donc $\widehat{BAC} = \widehat{ABS}$

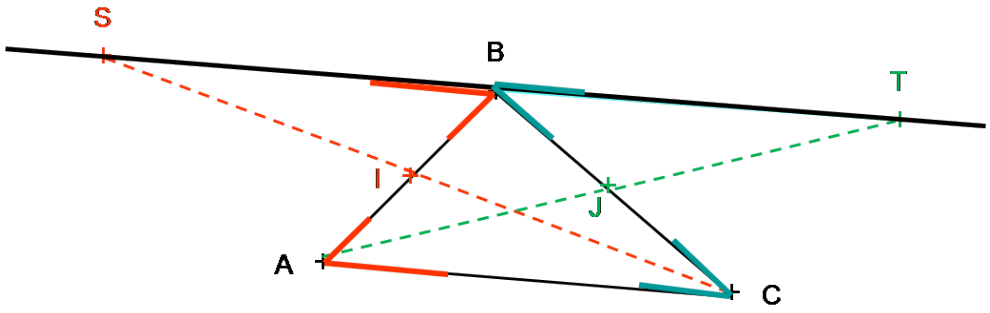
Le symétrique de l'angle BCA est l'angle CBT. On a donc $\widehat{BCA} = \widehat{CBT}$

Des calculs avec les angles



$\widehat{SBT} = \widehat{SBA} + \widehat{ABC} + \widehat{CBT}$ Comme : $\widehat{SBA} = \widehat{BAC}$ et $\widehat{CBT} = \widehat{BCA}$

On a donc : $\widehat{SBT} = \widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA}$



$\widehat{SBT} = \widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA}$ Comme : les points S, B et T sont alignés,

Alors : $\widehat{SBT} = 180°$ et : $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA} = 180°$

4) Propriétés des triangles usuels relatives aux angles

Triangle rectangle

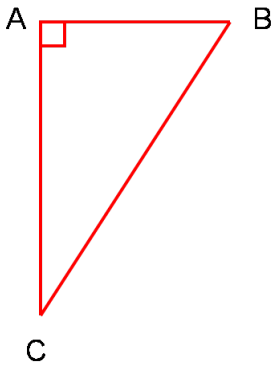
Propriété : Dans un triangle rectangle, la somme des 2 angles aigus est égale à 90°

ABC est un triangle rectangle en A.

Pour le triangle ABC : $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA} = 180°$

On a donc : $90° + \widehat{ABC} + \widehat{BCA} = 180°$

Soit : $\widehat{ABC} + \widehat{BCA} = 180° - 90° = 90°$

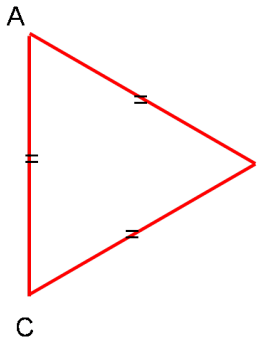


Propriété : Si dans un triangle la somme de deux angles est égale à 90°, alors ce triangle est un triangle rectangle.

Mesure des angles d'un triangle équilatéral

Propriété : Dans un triangle équilatéral , chacun des angles mesure 60°.

ABC est un triangle équilatéral. Ses trois angles ont la même mesure. Cette mesure est donc égale à : 180° / 3 = 60°.



Voici deux façons de reconnaître un triangle équilatéral :

• Si un triangle a deux angles de 60° alors ce triangle est équilatéral.

• Si un triangle isocèle a un angle de 60° alors ce triangle est équilatéral.

II) Classe de 4ème

1) Bissectrice d'un angle

Identique à la classe de 6ème

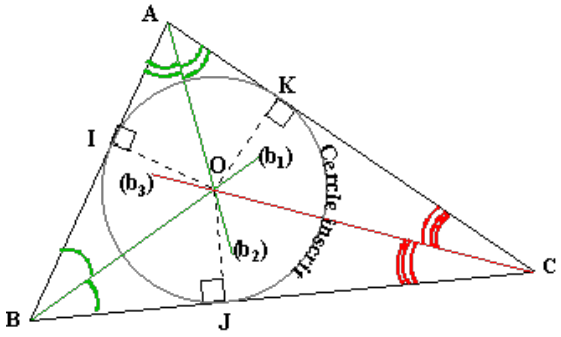
2) Bissectrice et cercle inscrit

Propriété : Si les bissectrices de deux angles d'un triangle se coupent en un point O alors la bissectrice du troisième angle passe par ce point O.

Remarque : Ce point O est le centre du cercle inscrit au triangle

Démontrons que OI = OJ = OK.

Comme [OI] et [OJ] sont perpendiculaires respectivement à (BA) et (BC) alors OI et OJ sont les distances de O aux côtés (BA) et (BC). (par définition de la distance d'un point à une droite)



Comme O appartient à la bissectrice (b_1) de l'angle ABC alors O est équidistant des côtés (BA) et (BC). (DIS n° 11) Donc: OI = OJ.
De même avec la bissectrice (b_2) de BÂC: OI = OK

Comme OI = OJ et OI = OK alors OI = OJ = OK.

En déduire que O appartient à la bissectrice de l'angle en C.

Les distances OJ et OK sont les distances de O aux côtés de l'angle ACB.
Comme OJ = OK alors O appartient à la bissectrice de l'angle ACB.

Conclusion:

O est donc l'intersection des bissectrices des trois angles du triangle ABC.

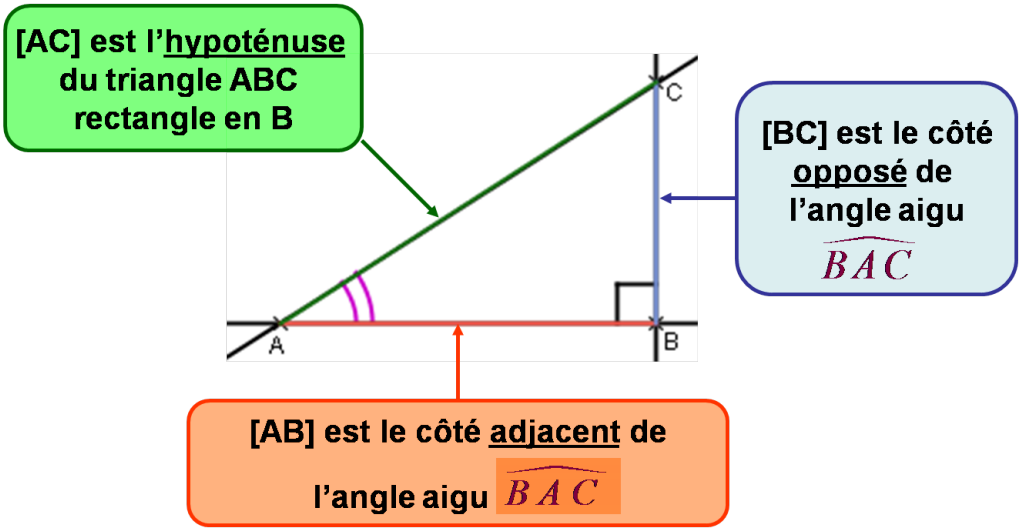
Nous avons OI = OJ = OK. Il existe donc un cercle de centre O qui passe par les points I, J et K. De plus les rayons [OI], [OJ] et [OK] sont perpendiculaires respectivement aux droites (AB), (BC) et (AC). Comme les droites (AB), (BC) et (AC) sont perpendiculaires respectivement aux rayons [OI], [OJ] et [OK] aux points I, J et K du cercle alors ces droites sont tangentes à ce cercle en ces points. (par définition des droites tangentes à un cercle)

Autrement dit, le cercle de centre O et de rayon [OI] est tangent aux trois côtés du triangle ABC. Ce cercle est appelé cercle inscrit dans le triangle ABC.

3) Triangle rectangle : cosinus d'un angle

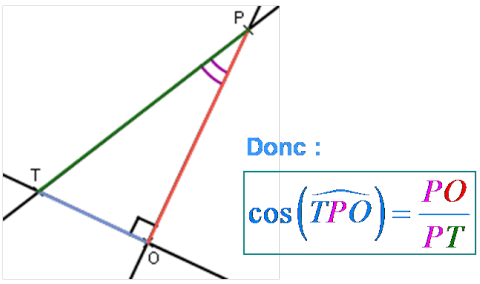
Un peu de vocabulaire …

Soit un triangle ABC rectangle en B :


[AC] est l'hypoténuse du triangle ABC rectangle en B
C
[BC] est le côté opposé de l'angle aigu $\widehat{BAC}$
A
B
[AB] est le côté adjacent de l'angle aigu $\widehat{BAC}$

Trigonométrie : le cosinus d'un angle aigu

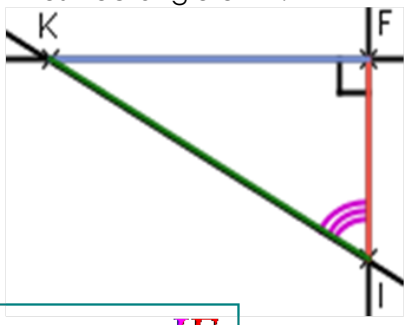
Dans un triangle rectangle, on appelle le cosinus d'un angle aigu le quotient de la mesure de la longueur du côté adjacent à cet angle par celle de l'hypoténuse du triangle.
Exemples :
Le triangle TOP est rectangle en O :



Donc :

$$\cos\left(\widehat{TPO}\right) = \frac{PO}{PT}$$

Le triangle KIF est rectangle en F :

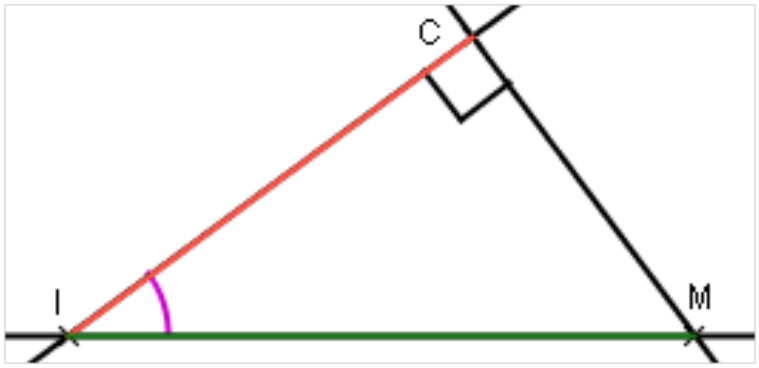


Donc :

$$\cos\left(\widehat{KIF}\right) = \frac{IF}{IK}$$

<u>Calculer une longueur à l'aide du cosinus d'un angle aigu</u>

Exercice rédigé :



Soit MIC un triangle rectangle en C tel que :

CI = 6 cm et $\widehat{MIC} = 25°$

[CI] est le côté adjacent de l'angle Î
[IM] est l'hypoténuse du triangle rectangle MIC

On a : $\cos\left(\widehat{MIC}\right) = \frac{IC}{IM}$

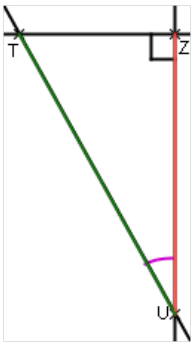
Si on utilise les données, cela revient à écrire : $\cos(25°) = \frac{6}{IM}$

Mais aussi : $\frac{\cos(25°)}{1} = \frac{6}{IM}$

D'où : $IM = \frac{6 \times 1}{\cos(25°)}$

Conclusion : $IM \approx 6{,}62$ (Valeur approchée à 0,01 centimètre près)

<u>Calculer la mesure d'un angle à l'aide du cosinus d'un angle aigu</u>



Exercice rédigé :

Soit ZUT un triangle rectangle en Z tel que :

ZU = 4,5 cm et TU = 7,2 cm

ZU] est le côté adjacent de l'angle Û,
[TU] est l'hypoténuse du triangle rectangle ZUT.

On a : $\cos\left(\widehat{ZUT}\right) = \frac{UZ}{UT}$

Si on utilise les données, cela revient à écrire : $\cos\left(\widehat{ZUT}\right) = \frac{4{,}5}{7{,}2}$

D'où : $\widehat{ZUT} = \cos^{-1}\left(\frac{4,5}{7,2}\right)$

Conclusion : $\widehat{ZUT} \simeq 51°$ (Valeur approchée à 1° près)

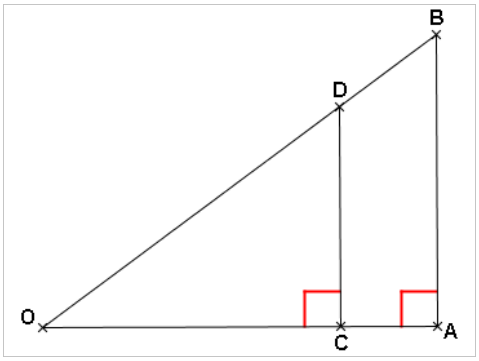
Quelques remarques utiles !
Pour un angle aigu de mesure ß d'un triangle rectangle, on a : 0 < cos(ß) < 1.
Il faut toujours vérifier que la calculatrice que l'on utilise fonctionne en mode degré. Si ce n'est pas le cas, il faut se reporter au mode d'emploi de la calculatrice.
Avant de se lancer dans les activités, il faut bien repérer les touches COS et COS^{-1} (ou encore ACS) de la calculatrice.
Lorsque l'on tape une séquence avec la calculatrice, les parenthèses sont souvent très importantes.

III) Classe de 3ème

1) Triangle rectangle, relations trigonométriques

Activité : préliminaires

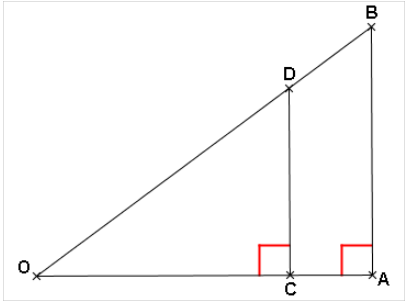
OAB est un triangle rectangle en A .On place un point C sur le segment [OA], puis on trace la perpendiculaire à (OA) passant par C, elle coupe [OB] en D.



On sait que :
• les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires à une même droite (OA)

Or : si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles Donc : (AB) // (CD)

Activité : un nouveau rapport



On sait que :
• les points O, C, A sont alignés ainsi que les points O, D, B
• (AB) // (CD)

Or : d'après la propriété de Thalès, on a :

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} = \frac{CD}{AB}$$

On a donc : $\frac{OD}{OB}=\frac{DC}{AB}$

On utilise enfin le « produit en croix » : $OD\times AB = OB\times DC$

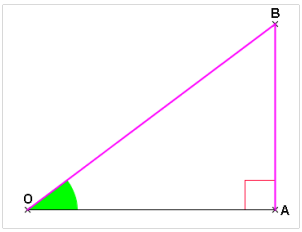
Puis on divise les deux membres par OD ×OB : $\frac{OD\times AB}{OD\times OB} = \frac{OB\times DC}{OD\times OB}$

En simplifiant, on obtient donc :
$\frac{AB}{OB} = \frac{DC}{OD}$

<u>Formule trigonométrique : sinus</u>

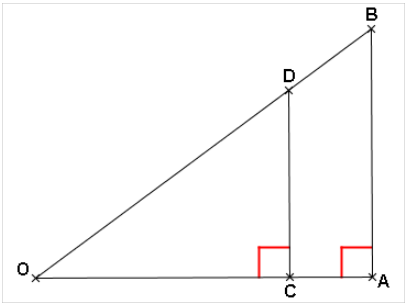
La valeur commune des rapports $\frac{AB}{OB}$ et $\frac{DC}{OD}$ ne dépend que de la mesure de l'angle $A\hat{O}B$

On l'appelle le sinus de l'angle $A\hat{O}B$



$$\sin A\hat{O}B = \frac{\text{longueur du côté opposé à l'angle } A\hat{O}B}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

<u>Activité : un troisième rapport</u>



On sait que :
- les points O, C, A sont alignés ainsi que les points O, D, B
- (AB) // (CD)

Or : d'après la propriété de Thalès, on a : $\frac{OC}{OA}=\frac{OD}{OB}=\frac{CD}{AB}$

On a donc : $\frac{OC}{OA}=\frac{DC}{AB}$

On utilise enfin le « produit en croix » : $OC\times AB = OA\times DC$

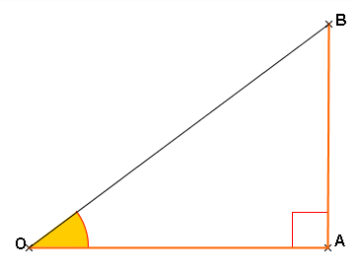
Puis on divise les deux membres par OC ×OA : $\frac{OC\times AB}{OC\times OA} = \frac{OA\times DC}{OC\times OA}$

En simplifiant, on obtient donc :
$\frac{AB}{OA} = \frac{DC}{OC}$

Formule trigonométrique : tangente

La valeur commune des rapports $\frac{AB}{OA}$ et $\frac{DC}{OC}$ ne dépend que de la mesure de l'angle $A\hat{O}B$

On l'appelle la tangente de l'angle $A\hat{O}B$



$$\tan A\hat{O}B = \frac{\text{longueur du côté opposé à l'angle } A\hat{O}B}{\text{longueur du côté adjacent à l'angle } A\hat{O}B}$$

Formule trigonométrique : cosinus d'un angle aigu

Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est égal au rapport :

$$\frac{\text{longueur du côté adjacent à l'angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

Ce rapport ne dépend que de la mesure de l'angle considéré.

En résumé

Pour utiliser les formules de trigonométrie, il faut se situer dans un triangle rectangle.

Ces trois rapports ne dépendent que de la mesure de l'angle considéré.

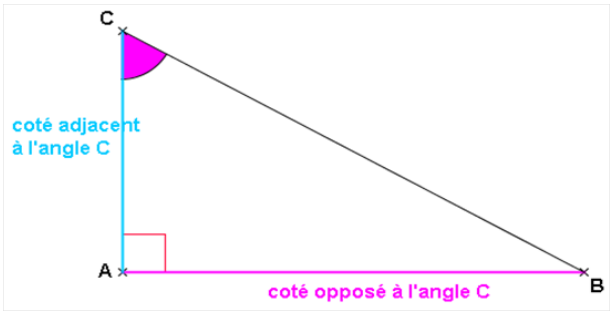
Le cosinus et le sinus d'un angle aigu sont toujours compris entre 0 et 1.

A quoi servent ces formules ?
Ces formules permettent de calculer des longueurs de côtés et des mesures d'angles dans des triangles rectangles.

Pour retenir les 3 rapports, on peut utiliser « la formule » :
Cos
Adjacent
Hypoténuse
Sin
Opposé
Hypoténuse
Tan
Opposé
Adjacent

Exemple d'application du calcul d'angles
ABC est un triangle rectangle en A, tel que : AB = 6 cm et AC = 4 cm.

Calculer l'arrondi au degré de l'angle $B\hat{C}A$.



Méthode :
♦ On trace une figure à main levée.
On repasse en couleur les données connues et celle cherchée.
♦ Par rapport à l'angle connu, on connait le côté adjacent et on cherche la longueur du côté opposé.
On va utiliser la formule de la tangente.

Dans le triangle ABC rectangle en B, on a : $\tan \hat{BCA} = \frac{AB}{AC}$

Soit : $\tan \hat{BCA} = \frac{6}{4} = 1,5$

D'où : $\hat{BCA} = \tan^{-1}(1,5)$

Sur la calculatrice, on lit : 56,30993247

Finalement : $\hat{BCA} \approx 56°$

<u>Propriétés des formules trigonométriques</u>

Dans un triangle rectangle, quelle que soit la mesure x d'un angle aigu, on a :

$$\text{Tan } x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{et} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Démonstration :

$$1) \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}}{\frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \times \frac{\text{hypoténuse}}{\text{côté adjacent}} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \tan x$$

2) On note :
CA le côté adjacent à l'angle x ;

CO le côté opposé à l'angle x ;

H l'hypoténuse du triangle rectangle ;

On a :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = \left(\frac{CA}{H}\right)^2 + \left(\frac{CO}{H}\right)^2 = \frac{CA^2}{H^2} + \frac{CO^2}{H^2} = \frac{CA^2 + CO^2}{H^2}$$

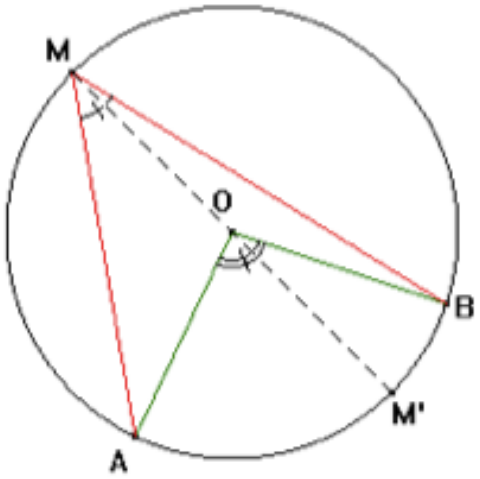
Or : dans un triangle rectangle, d'après la propriété de Pythagore, $CA^2 + CO^2 = H^2$.

Donc : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

2) Angle inscrit, angle au centre

Propriété : Si un angle inscrit dans un cercle et un angle au centre interceptent le même arc de cercle, alors l'angle au centre mesure le double de l'angle inscrit.

Démonstration :



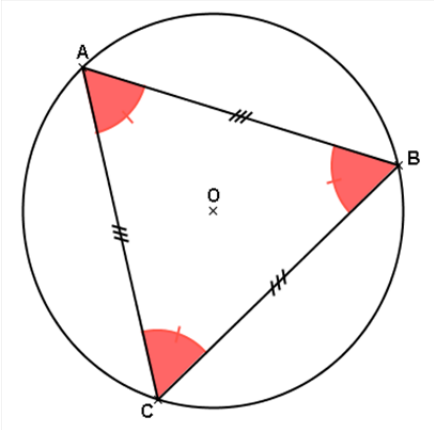
Soit M' le point diamétralement opposé à M.
OMA étant isocèle et la somme des angles d'un triangle étant égale à 180°, on peut écrire :
$2\widehat{AMO} + \widehat{MOA} = 180°$
soit $2\widehat{AMO} = 180 - \widehat{MOA}$
Or $\widehat{MOA} + \widehat{AOM'} = 180°$
Donc $2\widehat{MOA} = \widehat{AOM'}$
De manière analogue $2\widehat{BMO} = \widehat{BOM'}$
D'où
$2(\widehat{AMO} + \widehat{BMO}) = \widehat{AOM'} + \widehat{BOM'}$
c'est-à-dire
$2\widehat{AMB} = \widehat{AOB}$ soit $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$

3) Polygone régulier

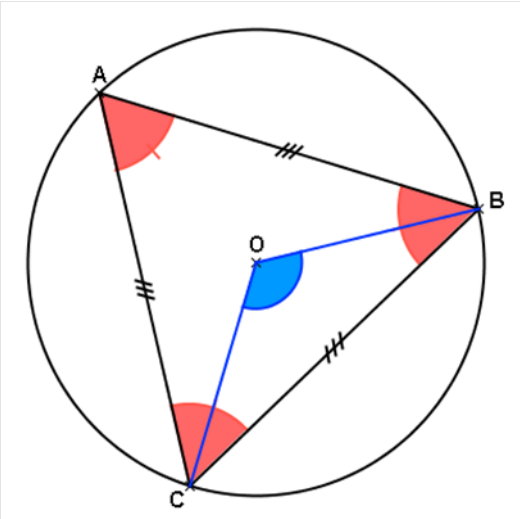
Définition : un polygone régulier est un polygone qui a tous ses côtés de même longueur et tous ses angles de même mesure.

Propriété : Si un polygone est régulier, alors il est inscriptible dans un cercle. Le centre du cercle est appelé centre du polygone.

On considère le triangle équilatéral ci-dessous. Le triangle équilatéral est un polygone régulier, il est donc inscriptible dans un cercle :



Problème : Quelle est la mesure de l'angle au centre CÔB ?



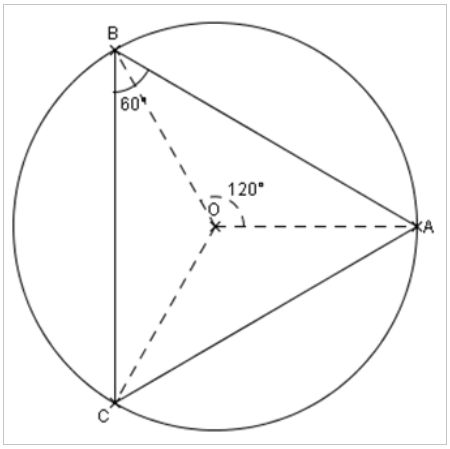
On sait que :
l'angle inscrit CÂB et l'angle au centre CÔB interceptent le même arc BC.
Or :
dans un cercle, si un angle inscrit et un angle au centre interceptent le même arc, alors la mesure de l'angle au centre est le double de celle de l'angle inscrit.
Donc :
BÔC = 2×BÂC = 2 ×60 = 120°.

De la même façon, on peut démontrer que les angles au centre BÔA et AÔC mesurent aussi 120 °.

Propriété :Si un polygone est régulier, alors la mesure de chaque angle au centre interceptant un côté du polygone est égale à : $\frac{360°}{n}$

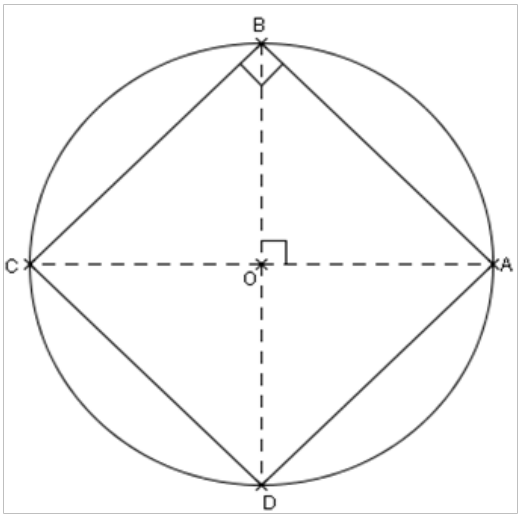
Exemple 1 : triangle équilatéral

Pour un triangle équilatéral, les angles au centre interceptant les côtés du triangle mesurent : 360 ÷ 3 = 120°.



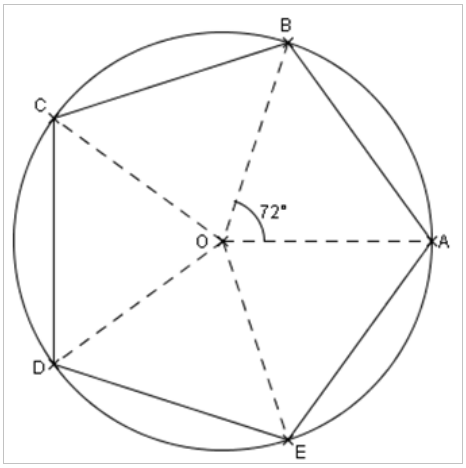
Exemple 2 : carré

Pour un carré, les angles au centre interceptant les côtés du carré mesurent : 360 ÷ 4 = 90°.



Exemple 3 : pentagone régulier

Pour un pentagone régulier, les angles au centre interceptant les côtés du pentagone mesurent : 360 ÷ 5 = 72°.



Exemple 4 : hexagone régulier

Pour un hexagone régulier, les angles au centre interceptant les côtés de l'hexagone mesurent : 360 ÷ 6 = 60°.